Universidad De Atacama

Facultad de Ingeniería / Departamento de Matemática

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD
PAUTA DE CORRECCIÓN PRUEBA RECUPERATIVA N° 2

Profesor: Hugo S. Salinas. Segundo Semestre 2009

DESARROLLO

1. Un sistema cuenta con un gran número de componentes de un mismo tipo. Supongamos que el tiempo de falla T (medido en horas) de cualquiera de estas componentes sigue aproximadamente una distribución normal, con media 100 horas y desviación estándar 20 horas.

   a) Calcular la probabilidad de que una componente dada dure más de 110 horas.
   Solución
   Sean $T \sim N(100, 20)$ y $Z \sim N(0, 1)$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T > 110) &= 1 - \mathbb{P}(T \leq 110) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{110 - 100}{20}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Z \leq 0.5) \\ &= 1 - 0.6915 = 0.3085 \end{aligned}$$

   (**7 ptos.**)

   b) Se desea dar una garantía de reemplazo para cualquier componente que dure menos de M horas. Encontrar el valor de M para que la probabilidad de que se haga efectiva la garantía sea sólo un 1 %.
   Solución

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T \leq M) &= 0.01 \\ \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{M - 100}{20}\right) &= 0.01 \\ \frac{M - 100}{20} &= -2.32 \\ M &= 53.6 \end{aligned}$$

   (**7 ptos.**)

   c) Considerar 20 componentes con tiempos de falla independientes (esto es, si $T_1, \ldots, T_{20}$ son los tiempos de falla, los eventos $\{T_i > t_i\}$ son mutuamente independientes para todo t_i), cada una con la distribución antes mencionada. Calcular la probabilidad de que a lo más dos componentes duren más de 100 horas.

Solución

Sean X : número de componentes que duran más de 100 horas, en una muestra de 20 componentes. Por lo tanto, $X \sim Bi(20, p)$ con $p = \mathbb{P}(T > 100)$

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}(T > 100) \\ &= 1 - \mathbb{P}(T \leq 100) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 0) = 1 - 0.5 = 0.5 \end{aligned}$$

Lo que se pide es:

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} \binom{20}{x} (0.5)^{20} = \frac{1 + 20 + 190}{2^{20}} = \frac{211}{2^{20}} = 0.00020$$

(**7 ptos.**)

2. **Resolver**:

a) Un supervisor del proceso de empacado de café en sobres, selecciona una muestra aleatoria de 12 sobres y mide el peso neto de los sobres, obteniendo la siguiente información: 15.7 , 15.8 , 15.8 , 15.9 , 15.9 , 16.0 , 16.0 , 16.0 , 16.1 , 16.1 , 16.1 y 16.2. Si el peso neto de los sobres sigue una distribución normal, determinar un intervalo al 90 % de confianza para la media.

Solución

Primero calculamos la desviación estándar de los datos, es decir $S = \left(\frac{n}{n-1}(\overline{X^2} - \overline{X}^2)\right)^{1/2}$.

En efecto:

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{191.6}{12} = 15.96667, \quad \overline{X^2} = \frac{\sum X_i^2}{n} = \frac{3059.46}{12} = 254.955$$

Luego

$$S^2 = \frac{12}{11}\left[254.955 - (15.96667)^2\right] = 0.022308 \approx 0.02 \Longleftrightarrow S = \sqrt{0.02} = 0.1414214 \approx 0.14$$

El intervalo de confianza (IC) para la media, con un 90 % de confianza está dado por:

$$\mu \in \left(15.97 \pm 1.7959 \, \frac{0.14}{\sqrt{12}}\right)$$

Pues al 90 % de confianza, el nivel de significancia es $\alpha = 0.1$, entonces $t_{11;0.1} = 1.7959$, luego:

$$\mu \in (15.90;\ 16.04)$$

(**6 ptos.**)

b) En un país oriental se desea estudiar la variable altura de los individuos. Para esto se realizó un estudio piloto con una muestra de personas la cual arrojó una media de 170 cm. Calcular el tamaño que debería tener la muestra para obtener un intervalo de confianza al 99 % con una precisión (error) de un centímetro. Usar $\sigma = 10$. Además asumir que la altura de los individuos distribuye normal.

Solución
Se sabe que $\mu = \overline{X} \pm \varepsilon$ donde $\varepsilon = z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Se debe resolver la ecuación:

$$1 = 2.57\,\frac{10}{\sqrt{n}}$$

Pues al 99 % de confianza, el nivel de significancia es $\alpha = 0.01$, entonces $z_{0.01} = 2.57$, luego $n = 661$.

(**6 ptos.**)

c) Supongamos que a partir de una muestra aleatoria de tamaño 25, se ha podido establecer un intervalo de confianza para la media poblacional que va desde 68 a 72 unidades de medida para un $\alpha = 0.01$. Encontrar un intervalo al 95 % de confianza para la media poblacional. Asumir que la varianza poblacional es conocida.

Solución
Del item *b*) vimos que $z_{0.01} = 2.57$. Luego, del enunciado se desprende que

$$\overline{X} - 2.57\,\frac{\sigma}{\sqrt{25}} = 68, \quad \overline{X} + 2.57\,\frac{\sigma}{\sqrt{25}} = 72$$

Resolviendo para $\overline{X}$, se tiene que $\overline{X} = 70$ y el error $2.57\,\frac{\sigma}{2} = 2$. Por lo tanto $\sigma = 3.89$. Finalmente, el IC para la media, con un 95 % de confianza está dado por:

$$\mu \in \left(70 \pm 1.96\,\frac{3.89}{5}\right)$$

Pues al 95 % de confianza, el nivel de significancia es $\alpha = 0.05$, entonces $z_{0.05} = 1.96$, luego:

$$\mu \in (68.48;\ 71.52)$$

(**6 ptos.**)

d) Se toma una muestra de 50 cascos de suspensión utilizados por los corredores de motos y los conductores de automóviles del Dakar 2010 y se sujetan a una prueba de impacto. En 18 de los cascos se observa cierto daño.

i. Encontrar un intervalo al 95 % de confianza para la verdadera proporción de cascos de este tipo que demostraran daño como resultado de la prueba.
Solución
En primer lugar, el estimador de la verdadera proporción está dado por $\widehat{p} = \frac{18}{50} = 0.36$. Por lo tanto, el IC para la proporción, con un 95 % de confianza está dado por:

$$p \in \left(0.36 \pm 1.96\,\sqrt{\frac{(0.36)(0.64)}{50}}\right)$$

Pues al 95 % de confianza, el nivel de significancia es $\alpha = 0.05$, entonces $z_{0.05} = 1.96$, luego:

$$p \in (0.23;\ 0.49)$$

(**6 ptos.**)

ii. Al utilizar la estimación puntual de p obtenida a partir de la muestra preliminar de 50 cascos. ¿Cuántos cascos deben probarse para tener una confianza del 95 % que el error al estimar el verdadero valor de p sea menor que 0.02?
Solución
De acuerdo a lo anterior, se debe resolver la desigualdad:

$$1.96\sqrt{\frac{(0.36)(0.64)}{n}} < 0.02 \iff \frac{0.2304}{n} < \left(\frac{0.02}{1.96}\right)^2$$

Por lo tanto $n > 2213$.
(**6 ptos.**)

3. El gimnasio *Pink Gym* ha comprobado que el 20 % de sus alumnos se dan de baja durante el primer mes y el 80 % restante permanecen todo el año. Supongamos que este año se inscribieron 20 alumnos.

a) Identificar la variable aleatoria del problema e indicar el nombre de su distribución.
Solución
Según lo señalado en el enunciado, definimos convenientemente la variable aleatoria (v.a.) Y : número de alumnos que se dan de baja el primer mes. Los posibles valores de esta v.a. son $0, 1, \ldots, 20$. De este modo $Y \sim Bi(20, 0.2)$. (**3 ptos.**)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que 2 o menos se den de baja?
Solución:
Nos piden

$$\mathbb{P}(Y \leq 2) = \sum_{y=0}^{2} \binom{20}{y} (0.2)^y (0.8)^{20-y} = 0.2061847 \approx 0.21$$

(**5 ptos.**)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente se den de baja 4 alumnos?
Solución
Nos piden calcular

$$\mathbb{P}(Y = 4) = \binom{20}{4} (0.2)^4 (0.8)^{16} = 0.2181994 \approx 0.22$$

(**5 ptos.**)

d) ¿Cuál es la probabilidad de que se den de baja más de 3 alumnos?
Solución
Piden calcular

$$\mathbb{P}(Y > 3) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 3) = 1 - 0.4114489 = 0.5885511 \approx 0.59$$

(**5 ptos.**)

e) Al hacer la inscripción se realiza un único pago anual de 600 dólares. Cada alumno que permanece todo el año genera un gasto anual de 150 dólares.

i. ¿Cuál es el beneficio anual esperado?
Solución

Por cada alumno tenemos un ingreso de 600 dólares. Como se han inscrito 20 alumnos tenemos un ingreso total de $I = 20 \times 600 = 12000$ dólares. Cada alumno que permanece todo el año genera un gasto anual de 150 dólares. Si Y es el número de alumnos que se dan de baja el primer mes, entonces el número de alumnos que permanecen todo el año es $20 - Y$. Por tanto, el gasto anual es $G = 150 \times (20 - Y)$. De esta manera, el beneficio anual es $B = I - G = 12000 - 150(20 - Y)$. Es decir:

$$B = 9000 + 150Y$$

El beneficio anual esperado es $E(B)$. Aplicando que $E(a+bY) = a+bE(Y)$, tenemos que:

$$E(B) = 9000 + 150E(Y)$$

Como la variable $Y \sim Bi(20, 0.2)$, entonces $E(Y) = np = 20 \times 0.2 = 4$. Por lo tanto,

$$E(B) = 9000 + 150 \times 4 = 9600$$

(**5 ptos.**)

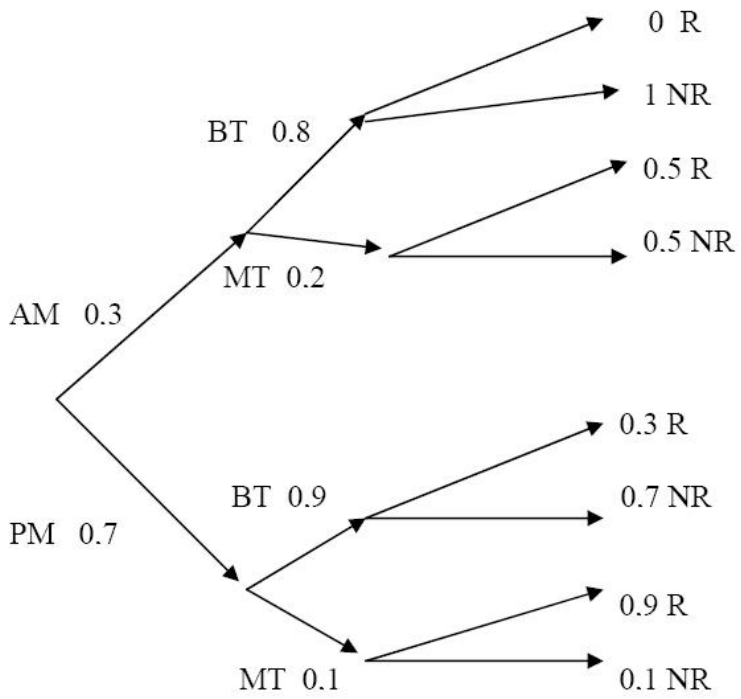
ii. ¿Cuántos alumnos se han dado de baja el primer mes si al final del año el gimnasio ha obtenido el beneficio esperado?
Solución
Si el beneficio obtenido es el esperado, esto es $B = 9600$ dólares, despejando Y en la expresión $B = 9000 + 150Y$ se sigue que $Y = 4$. Luego se han dado de baja 4 alumnos. (**2 ptos.**)

4. Los retrasos de vuelos en los aeropuertos es un fenómeno común para los pasajeros. La posibilidad de retraso depende de las condiciones climáticas y de la hora del día. La siguiente información está disponible para nuestro aeropuerto:

   - En la mañana (AM), no hay retrasos si el buen tiempo prevalece. Sin embargo, si hay mal tiempo la mitad de los vuelos se retrasa.
   - Para el resto del día (PM), las probabilidades de retraso durante el buen tiempo es 0.3 y con mal tiempo 0.9.
   - El 30 % de los vuelos se realizan durante la mañana (AM), mientras que los restantes se realizan durante la tarde (PM).
   - Tener mal tiempo es más probable en la mañana, de hecho, el 20 % de las mañanas están asociadas con el mal tiempo. Mientras que sólo el 10 % de las horas PM han presentado mal tiempo.

   Suponer que sólo existen dos estados del tiempo: bueno y malo. Con la información presentada:

   a) Traducir los datos del enunciado, introduciendo los sucesos convenientes.
   Solución
   Sean los siguientes eventos BT : buen tiempo, MT : mal tiempo, R : hay retraso y NR : no hay retrasos. Del enunciado es conveniente el siguiente esquema de árbol:



(**6 ptos.**)

b) ¿Qué porcentaje de los vuelos de este aeropuerto se retrasan?
Solución
Notar que:

$$R = (R \cap AM \cap BT) \cup (R \cap AM \cap MT) \cup (R \cap PM \cap BT) \cup (R \cap PM \cap MT)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}(AM)\mathbb{P}(BT|AM)\mathbb{P}(R|AM \cap BT) + \mathbb{P}(AM)\mathbb{P}(MT|AM)\mathbb{P}(R|AM \cap MT) \\ &+ \mathbb{P}(PM)\mathbb{P}(BT|PM)\mathbb{P}(R|PM \cap BT) + \mathbb{P}(PM)\mathbb{P}(MT|PM)\mathbb{P}(R|PM \cap MT) \end{aligned}$$

De lo anterior se tiene lo siguiente:

$$\mathbb{P}(R) = (0.3)(0.8)(0) + (0.3)(0.2)(0.5) + (0.7)(0.9)(0.3) + (0.7)(0.1)(0.9) = 0.282$$

(**6 ptos.**)

c) Si el vuelo es retrasado, ¿cuál es la probabilidad que sea causa del mal tiempo?
Solución
Se pide lo siguiente:

$$\mathbb{P}(MT|R) = \frac{\mathbb{P}(R \cap MT)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{(0.3)(0.2)(0.5) + (0.7)(0.1)(0.9)}{0.282} = 0.3297872 \approx 0.33$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R \cap MT) &= \mathbb{P}(R \cap MT \cap AM) + \mathbb{P}(R \cap MT \cap PM) \\ &= \mathbb{P}(AM)\mathbb{P}(MT|AM)\mathbb{P}(R|AM \cap MT) + \mathbb{P}(PM)\mathbb{P}(MT|PM)\mathbb{P}(R|PM \cap MT) \end{aligned}$$

(**6 ptos.**)

d) ¿Qué porcentaje de vuelos matinales en este aeropuerto son retrasados?
Solución
Se pide:

$$\mathbb{P}(R|AM) = \frac{\mathbb{P}(R \cap AM)}{\mathbb{P}(AM)} = \frac{(0.3)(0.8)(0) + (0.3)(0.2)(0.5)}{0.3} = 0.1$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R \cap AM) &= \mathbb{P}(R \cap AM \cap BT) + \mathbb{P}(R \cap AM \cap MT) \\ &= \mathbb{P}(AM)\mathbb{P}(BT|AM)\mathbb{P}(R|AM \cap BT) + \mathbb{P}(AM)\mathbb{P}(MT|AM)\mathbb{P}(R|AM \cap MT) \end{aligned}$$

(**6 ptos.**)